

# 数の集合, 関数, 写像

<http://www2s.biglobe.ne.jp/~ftcenter/>

平成 18 年 10 月 12 日

## 1 数の集合

初めに, 解析学で用いる数の集合と関数, 関数の一般化である写像について述べる.

基本的な数の集合として以下のものがある. 詳しくは次章で述べる,

- 自然数全体の集合  $\mathbb{N}$  (Natural number の  $N$  より).
- 整数全体の集合  $\mathbb{Z}$  (独語 Zahl(数) の  $Z$  より).
- 有理数全体の集合  $\mathbb{Q}$  (Quotient(商) の  $Q$  より).
- 実数全体の集合  $\mathbb{R}$  (Real number の  $R$  より).
- 複素数全体の集合  $\mathbb{C}$  (Complex number の  $C$  より).

通常, 自然数全体の集合は  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  で  $0$  を含まないが,  $0$  を含んだ方が議論が簡単なる場合に便宜的に  $0$  を  $\mathbb{N}$  に含める事もある. そのような場合は, 本や論文の最初に断り書きがある.

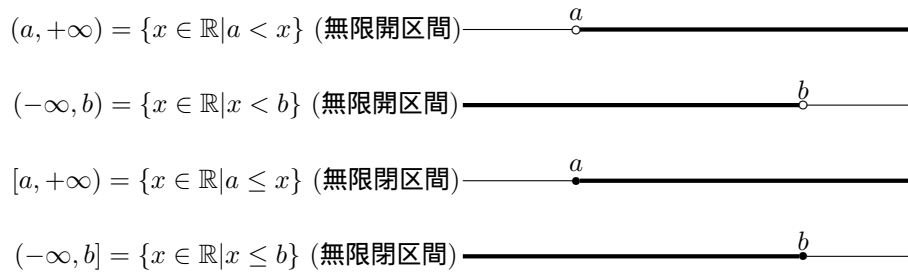
解析学では主に実数を扱うが, 実数の部分集合として頻繁に現れる「区間」として以下のものがある.  $a < b$  のとき,

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\} \text{ (开区間)} \quad \text{---} \overset{a}{\circ} \text{---} \text{---} \overset{b}{\circ} \text{---} \text{---}$$

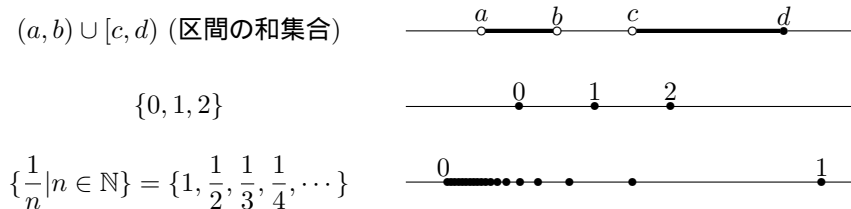
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\} \text{ (半开区間)} \quad \text{---} \overset{a}{\bullet} \text{---} \text{---} \overset{b}{\circ} \text{---} \text{---}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\} \text{ (半开区間)} \quad \text{---} \overset{a}{\circ} \text{---} \text{---} \overset{b}{\bullet} \text{---} \text{---}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} \text{ (闭区間)} \quad \text{---} \overset{a}{\bullet} \text{---} \text{---} \overset{b}{\bullet} \text{---} \text{---}$$



「区間」というのは、途中が途切れていない場合を指す。当然、区間ではない実数の部分集合もある。



他にも実数の部分集合はいろいろある。例えば  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  も実数の区間ではない部分集合である。

2つの集合  $A, B$  に対して、それぞれの要素  $a \in A, b \in B$  の組  $(a, b)$  を考え、 $A, B$  の全ての要素の組み合わせでこの組を作った時の集合を直積集合  $A \times B$  という。2つの実数の組  $(x, y)$  全体の集合  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  は実質的に2次元ベクトル全体の集合と同じである。3つ以上の集合の直積や3次元ベクトル全体についても同様である。

## 2 関数

「関数」という概念は、小学校で習った「比例」を始めとしているいろいろあるが、「それぞれの数に対応してある数が決まる」という対応関係であった。例えば

$$\text{実数 } x \text{ に対して } A \text{ さんの } x \text{ 歳の時の身長を } f(x) \text{ (cm) とする。} \quad (2.1)$$

は立派な関数である。ただし、 $x < 0$  では身長というものが意味を持たないし、 $A$  さんがちょうど19歳ならば  $x > 19$  もまだ意味を持たない。つまり、 $f(x)$  が値を持つのは  $0 \leq x \leq 19$  の場合だけである。この時、実数の部分集合  $I = [0, 19]$  を関数  $f(x)$  の定義域という。または、 $f(x)$  は  $I$  上定義された関数であるという。一方、 $A$  さんが生まれた時の身長が50cmで、縮む事なく身長が今まで伸び続けて、現在172cmであるならば、

$50 \leq y \leq 172$  なる  $y$  に対して, 身長  $y$  cm だった年齢  $x$  がある事になる (この点については後に詳しく述べる). 言い換えると,  $f(x)$  が取り得る値は  $J = [50, 172]$  の範囲である. この実数の部分集合  $J$  を値域という. このような関数  $f(x)$  を

$$f : [0, 19] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = (\text{A さんの } x \text{ 歳時の身長 (cm)})$$

などと表記する. “[0, 19] → ℝ” の矢印の右側は  $J$  を含んでいけば良い. 括弧内の文章は, 数式で書ければ数式で書いても良いし, 何語で書こうがとにかく  $x$  に対応する値が決まれば良い.

それでは,

$$\text{実数 } x \text{ に対して } x = y^2 \text{ となる } y \tag{2.2}$$

という  $x$  と  $y$  の関係はどうであろうか.  $x < 0$  ではそんな  $y$  が存在しないが, 一方で  $x > 0$  では対応する  $y$  が二つある. ひとつの  $x$  に二つ以上の答えが出てくる対応関係は世の中にたくさんあるが, それだと数学的な取り扱いがややこしくなる事が多い. そこで「ひとつの  $x$  にひとつの  $y$  が対応する関係」を「関数」と呼ぶ事とする. どうしても二つ以上の答えが出てくるものを関数と呼びたい時には「二価関数」「三価関数」…「多価関数」などと呼ぶ. 上で挙げた  $x$  と  $y$  の関係は狭い意味での関数ではない(二価関数である). しかし, 二つ以上ある答えのうちのひとつを選べば, 関数にする事が出来る. たとえば

$$\text{実数 } x \text{ に対して } x = y^2 \text{ となる } y \text{ で } 0 \text{ 以上のもの} \tag{2.3}$$

とすれば狭い意味の関数になる.(これが  $y = \sqrt{x}$  である.)

定義域内のそれぞれの数にひとつ数が決まれば関数であるから,

$$f_1(x) = (x \text{ の } 10 \text{ 進数表示での } 1 \text{ の位の数}), f_2(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ が有理数の時,} \\ 0, & x \text{ が無理数の時.} \end{cases}$$

なども立派な実数上定義された関数である.

では図 1 のような対応関係はどうであろうか.

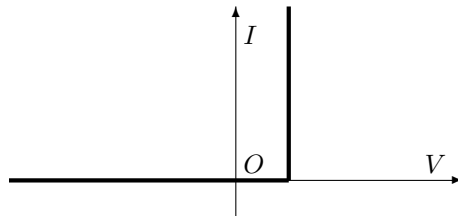


図 1: 理想ダイオードの電圧-電流特性

ある一定の電圧以下では電流は流れないが、一定の電圧がかかると周りの状況次第でいくらでも電流が流れる。そして、それ以上の電圧はかからない。あくまで「理想ダイオード」であって現実のダイオードとは異なるが、計算を簡単にするためにこのような「理想化」が現実になされている。しかし、これはもはや関数と呼べる代物ではなく、計算を簡単にするための別種の技法である。こういったものはまた別に議論する必要がある。

さて、(2.1) の逆にあたる対応関係、すなわち

$$A \text{ くんが身長 } x \text{ cm だった時の年齢は } g(x) \text{ 歳} \quad (2.4)$$

という関係も考えられる。このような  $g(x)$  を  $f(x)$  の逆関数といい、 $f^{-1}(x)$  とかく。一般的に書くと、

$$f^{-1}(x) = (f(y) = x \text{ を満たす } y) \quad (2.5)$$

となる。(2.1) の逆関数の定義域は  $f(x)$  の値域  $J$  である。

ところで、A くんが身長が 18 歳以降全然伸びずに 172cm のままであった場合、 $g(172) = f^{-1}(172)$  の値はどうなるであろうか。答えは 18 から 19 の間の全ての数という事になる。すなわち  $f(x)$  の逆関数は狭い意味での関数になっていない。(2.2) も、実は  $y = x^2$  の逆関数である。これも狭い意味での関数になっていなかった。このように逆関数は一般に狭い意味の関数になるとは限らないが、(2.2) でやったのと同様に、複数の値がある場合はひとつの値を選んでやれば狭い意味の関数になる。

念のため注意しておくが、 $f^{-1}(x)$  は  $f(x)$  の逆数  $f(x)^{-1}$  とは異なる。では、なぜ逆関数を  $f^{-1}(x)$  と書くかということ、自分自身への合成関数  $f(f(f(x)))$  を  $f^3(x)$  などと書く場合がある事と関係している。逆関数に対しては  $f(f^{-1}(x)) = x$  が成り立つので、この観点からすれば記号として分かりやすい。(なお、(2.4) や (2.5) の例から分かるように  $f^{-1}(f(x)) = x$  は必ずしも成り立つとは限らない。) しかしながら、三角関数の場合は慣例で  $(\sin x)^3 = \sin^3 x$  などと書く場合があり、さらにその一方で  $\sin x$  の逆関数は  $\sin^{-1} x$  と書くので、慣例とはいえ紛らわしいのは事実である。

### 3 写像

関数の場合は数と数の対応関係であったが、別に数に限る必要もない。関数の概念を拡張しよう。もっと一般的な集合  $A, B$  において、 $A$  の各要素に  $B$  の要素がひとつ対応する関係の事を  $A$  上定義された  $B$  値写像と呼ぶ。例えば  $A = \{K \text{ 大学の学生全体の集合}\}$  と自然数全体の集合  $\mathbb{N}$  に対して

$$f_1 : A \rightarrow \mathbb{N}, \quad x \mapsto (x \text{ くんが } K \text{ 大学での学籍番号})$$

という写像が考えられる. もっともこれは結果が数字だから, まだ「関数」と呼べるかもしれない.

$$f_2 : A \rightarrow \{ \text{優, 良, 可, 不可} \}, \quad x \mapsto (x \text{ くん} \text{の解析学の成績})$$

これはもう答えが数でないから写像と言うべきであろう.  
円のパラメータ表示である

$$f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$$

も, 実数上 2 次元ベクトル値写像である.

$$f_4 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto (\text{室内の座標 } (x, y, z) \text{ での気温})$$

このように 3 つの数字に対して 1 つの数字が決まる写像を 3 変数関数という.

$$f_5 : \mathbb{N} \rightarrow \{ \text{多項式全体の集合} \}, \quad n \mapsto x^{2n} + nx^n$$

これも自然数上の多項式値写像である. (ただし自然数上定義された写像は, 順番に並べる事が出来るために, 数列や関数列など「... 列」と呼ばれることが多い.)

無限回微分可能な関数全体の集合を  $F$  とすると,

$$f_6 : F \rightarrow F, \quad f(x) \mapsto f'(x)$$

つまり微分という操作も  $F$  上  $F$  値写像, いわば「関数の関数」と見る事が出来る.

$$g : \{ \text{地球表面全体} \} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{地球上の点 } x \mapsto (x \text{ における気圧})$$

$$h : (-180, 180] \times [-90, 90] \rightarrow \{ \text{地球表面全体} \}, \\ (\theta, \phi) \mapsto (\text{緯度 } \theta, \text{経度 } \phi \text{ に相当する地球上の点})$$

ここで  $g(x)$  の定義域が  $h(\theta, \phi)$  の値域を含むので, 合成写像  $g(h(\theta, \phi))$  を考える事が出来る. 出来上がった写像は

$$g \circ h : (-180, 180] \times [-90, 90] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\theta, \phi) \mapsto (\text{緯度 } \theta, \text{経度 } \phi \text{ における気圧})$$

で, 2 変数関数になる. 「地球上表面のある点の気圧」などと言われるよりは, 「北緯何度, 東経何度の気圧はいくら」と言ってもらった方が人間にとって分かりやすいし, 微分や積分を通して様々な研究もしやすくなる. 緯度経度のようないまい座標を入れて数字だけの問題に出来れば, 人間にとっても便利なのである. (それが出来ない問題も多いので大変なのであるが.)