実数とはなにものか?

http://www2s.biglobe.ne.jp/~ftcenter/

平成 18 年 11 月 4 日

1　数の集合再説

この章では主に実数について論じるが, まずは自然数からはじめよう.

1.1　自然数全体の集合 $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ の主な性質を挙げると

(1) 要素 1 がある.

(2) 足し算 $+$ という演算があり, どんな要素 a, b, c にも次が成り立つ.

$$a+b=b+a \text{ (交換則)}, \quad a+(b+c)=(a+b)+c \text{ (結合則)}.$$

(3) どの要素 n も $n=1+1+1+1+\cdots+1$ の形で表せる.

(4) 掛け算 $\times$ という演算があり, どんな要素 a, b, c にも次が成り立つ.

$$a\times b=b\times a \text{ (交換則)}, \quad a\times(b\times c)=(a\times b)\times c \text{ (結合則)}.$$

(5) 足し算と掛け算に関して, どの要素 a, b, c に対しても次が成り立つ.

$$a\times 1=1\times a=a, \quad (a+b)\times c=a\times c+b\times c \text{ (分配則)}.$$

(6) 順序関係 $<$ がある. 等しくない 2 つの要素 a, b に対しては $a<b$ か $b<a$ のいずれか一方だけが成り立ち, 「$a<b$ かつ $b<c$ ならば $a<c$」が成り立つ. (このような関係を全順序関係, または線形順序関係という.)

自然数において特徴的なのは (3) であろう. また (5) は単に式が成り立つというだけでなく,

$$m\times n=(\overbrace{1+1+\cdots+1}^{m\text{ 個}})\times n=\overbrace{n+n+\cdots+n}^{m\text{ 個}}$$

つまり小学校の時に習った掛け算の意味を式だけで表現したものなのである．したがって, 以降において数を拡張していくが, (5) は「掛け算の意味を守る」という点から必ず成り立つように拡張していくのである．

さて, (自然数) + (自然数) や (自然数) $\times$ (自然数) の答えは自然数である．つまり $+$ や $\times$ という演算は $\mathbb{N}$ の中にうまく収まっている．この事を, $+$ や $\times$ は $\mathbb{N}$ で閉じているという．一方, 引き算 (自然数) – (自然数) は $\mathbb{N}$ で閉じてない．言い方を変えると, 自然数 a, b に対して方程式 $x + a = b$ の解が自然数の中にあるとは限らない．

そこで自然数に「 0 と負の数」を付け加えて拡張しよう．

1.2　整数全体の集合 $\mathbb{Z}$

整数への拡張によって, (1)–(6) のうち (3) は成り立たなくなるが, 他は全て成り立ち, 加えて次が成り立つ．

(7) 方程式 $x + a = b$ は必ず解を持つ．すなわち引き算について閉じている．

しかし, 割り算 (整数) $\div$ (整数) は $\mathbb{Z}$ で閉じてない．言い方を変えると, 整数 a, b に対して一次方程式 $ax = b$ の解が整数にあるとは限らない．

そこで今度は分数を付け加えて拡張しよう．

1.3　有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$

この拡張によって, (1)–(7) のうち (3) 以外が全て成り立ち, 加えて次が成り立つ．

(8) $a \neq 0$ ならば, 一次方程式 $ax = b$ は必ず解を持つ．すなわち 0 以外の数で割り算が出来る．

$a = 0$ の場合は, $b \neq 0$ で「解なし」になるので仕方ないが, それ以外で割り算が出来るようになった．

しかし, 2 次方程式 $x^2 = 2$ の解は $\mathbb{Q}$ の中にない．この方程式の解は「一辺の長さが 1 の正方形の対角線の長さ」である．こんな重要な数字がないのは困る．他にも $x^3 = 2$, $x^4 + 1 = 0$ などが $\mathbb{Q}$ にない．一般に有理数係数の n 次方程式の解は $\mathbb{Q}$ にあるとは限らない．そこで思い切って, 全ての有理数係数の n 次方程式の解 (代数的数) を $\mathbb{Q}$ に付け加えてみよう．

1.4 代数的数全体の集合 $\mathbb{A}$

この拡張によって, (1)–(7) のうち, (3) に加えて (6) も成り立たなくなる. つまりうまい順序関係が取れなくなる. しかし, その代わりに次が成り立つ.

(8) $\mathbb{A}$ 係数の n 次方程式は必ず $\mathbb{A}$ の中に解を持つ.

さて, これで必要な数は全て揃っただろうか? しかし, まだ実数と複素数が出て来ていない.

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に 2 次方程式 $x^2+1=0$ の解を付け加え, 加減乗除がうまくいくように拡張したのが複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ である. $\mathbb{C}$ に対しては次の有名な定理が成り立つ.

定理 1.1 (代数学の基本定理). $\mathbb{C}$ 係数の n 次方程式は必ず $\mathbb{C}$ の中に解を持つ.

つまり (8) と同じ事が成り立つ. しかし, そもそも $\mathbb{A}$ は $\mathbb{Q}$ 係数の n 次方程式の解全てであった. 一方, $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ であるから, $\mathbb{Q}$ 係数 n 方程式は $\mathbb{C}$ 係数 n 方程式でもあり, その解は上の定理より $\mathbb{C}$ の中にある. つまり $\mathbb{A}\subseteq\mathbb{C}$ である.

しかしながら, $\mathbb{A}=\mathbb{C}$ ではない. 例えば円周率 π は $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ に含まれるが, $\mathbb{A}$ には含まれない. 直径 1 の円の周の長さが $\mathbb{Q}$ はもちろんのこと, $\mathbb{A}$ にもないのである. 他にも自然対数の底 e や sin(0 以外の有理数) も $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ には含まれるが, $\mathbb{A}$ には含まれない. 有理数でない実数の事を無理数と言うが, 代数的数でもない実数の事を超越数という. すなわち π, e, sin(0 以外の有理数) は超越数である. 超越数は非常に多く, $\mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ はもちろんのこと, $\mathbb{A}$ よりもはるかに大きい集合である.

それでは, $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ は一体どんな数の集まりなのであろうか. $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ に $x^2+1=0$ の解, つまり虚数単位 i を付け加えたものであるが, $\mathbb{R}$ がなにものかが分からないと話にならない. 代数学の基本定理も, 実数がなにものか分からない事には証明も出来ない. $\mathbb{R}$ が $\mathbb{Q}$ を含むのは明らかだが, では $\mathbb{Q}$ をどのように拡張したものであろうか. 以下の節では「実数とはなにものか?」を考える.

2 最大値, 最小値, 上限, 下限

まずは実数の部分集合の最大値と最小値を定義する.

定義 2.1.

1. $\mathbb{R}$ の部分集合 A の最大値が m である $(m = \max(A))$ とは, $m \in A$ であって, どんな $x \in A$ に対しても $x \leq m$ であることをいう.
2. $\mathbb{R}$ の部分集合 A の最小値が n である $(n = \min(A))$ とは, $n \in A$ であって, どんな $x \in A$ に対しても $x \geq n$ であることをいう.

ここで重要なのは, 最大値, 最小値は A の中の要素である点である. そして次の例からも分かるように, 最大値, 最小値が存在しない部分集合もある.

例 2.1.

1. $A = [0, 1]$ の時, 最大値 1, 最小値 0.
2. $A = (0, 1)$ の時, 最大値も最小値も存在しない. 実際, どんな $x \in A$ に対しても, $0 < x/2 < x$ であり, A のどの要素に対してももっと小さな A の要素が存在する.

しかし, 最大値, 最小値がないからといって無限に広がっている訳でもない. 上や下に限度があることを示す目安が必要であろう.

定義 2.2.

1. 実数 m に対して, どんな $x \in A$ も $x \leq m$ であるとき, m は A の上界であるという.
2. 実数 n に対して, どんな $x \in A$ も $x \geq n$ であるとき, n は A の下界であるという.

m, n は A の要素である必要はないから, 有限の区間であれば必ず存在する. A に適当な上界が存在するとき, A は上に有界であるという. A に適当な下界が存在するとき, A は下に有界であるという. 上にも下にも有界であれば, 単に有界であるという.

例 2.2. 例 2.1 で考えると, 1. でも 2. でも, 1 以上の実数は全て上界になり, 0 以下の実数は全て下界になる.

この例からも分かるように, 上界, 下界は存在すればたくさんある. そこで, A が上に有界ならば, 上界の中の最小値を A の上限 $(\sup A)$ という. A が下に有界ならば, 下界の中の最大値を A の下限 $(\inf A)$ という. 便宜上, A が上に有界でないときは $\sup A = +\infty$, A が下に有界でないときは $\inf A = -\infty$ とする.

例 2.3. 例 2.1 の場合は 1. でも 2. でも $\sup A = 1$, $\inf A = 0$ である.

ところで, 部分集合の最大値, 最小値は存在するとは限らなかった. A が上に有界であれば「 A の上界の集合」が空集合という事はないが, 果たしてその最小値である上限は必ず存在するのであろうか?

ここで次の「公理」を挙げておく.

公理 2.1.

1. 上に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合の上限は $\mathbb{R}$ の中に必ず存在する.
2. 下に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合の下限は $\mathbb{R}$ の中に必ず存在する.

この公理の証明は「ない」. その意味するところは次節で述べるが, 次の例がその一部を示している.

例 2.4. $\{x \in \mathbb{Q} | x^2 \leq 2\}$ は, 上にも下にも有界である. 実際 2 が上界になっているし, -2 が下界になっている. しかし, 「有理数の中には最小上界も最大下界もない」.

3 数列の極限

$a_n = \dfrac{1}{n}$ のように, 順番をつけた数の列を数列といい, $\{a_n\}$ と表記する.

この数列 $a_n = \dfrac{1}{n}$ は, n が大きくなるにつれて 0 に近づいていく. n がさらに大きくなれば, いくらでも 0 に近づく. (しかし 0 になる事はない.) このような状況を, $\{a_n\}$ が 0 に収束する, あるいは $\{a_n\}$ の極限が 0 である, という. 数式では

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{または} \quad a_n \to 0 \ (n \to \infty)$$

とかく.

しかし, $b_n = \dfrac{1}{n} + 1$ は, n が大きくなれば 0 に近づくが, 0 に収束するとは言わない. いくら近づいても距離が 1 以上離れているからである. つまり収束を考える上で距離が重要になってくる.

そこで, 収束の概念を自然数と実数だけを用いて明確化してみよう.

定義 3.1. 数列 $\{a_n\}$ が a に収束するとは, どんな小さな正の実数 ϵ に対しても,

$$n \geq N \quad \text{ならば} \quad |a_n - a| < \epsilon$$

となるような自然数 N が存在する事をいう.

つまり, どんな小さな正実数 ϵ をとっても, ある番号より先は a との距離が ϵ 未満になる, もっと小さな ϵ をとっても, もっと大きなある番号より先では a との距離がそれ未満になる. という事を整えた文章で言ったのが上の定義である.

同様に, 「数列の発散」という概念も明確化しておくと,

定義 3.2.

1. 数列 $\{a_n\}$ が $+\infty$ に発散するとは, どんな大きな実数 ϵ に対しても,

   $$n \geq N \quad \text{ならば} \quad a_n > \epsilon$$

   となるような自然数 N が存在する事をいう.

2. 数列 $\{a_n\}$ が $-\infty$ に発散するとは, どんな小さな実数 ϵ に対しても,

   $$n \geq N \quad \text{ならば} \quad a_n < \epsilon$$

   となるような自然数 N が存在する事をいう.

収束もせず, $\pm\infty$ に発散もしない数列を, 単に発散する, または振動するという.

このように明確化すれば, 次のような定理を明確に証明する事が出来る.

定理 3.1. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ のとき,

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$
3. すべての n で $b_n \neq 0$, $b \neq 0$ のとき, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

証明. 1. だけを証明する. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ より, どんなに小さい正実数 ϵ に対しても,

$$\text{ある自然数 } N_1 \text{において}, n \geq N_1 \text{ならば } |a_n - a| < \epsilon/2.$$

(どんな小さな正実数でもいいのだから, $\epsilon/2$ に対しても成り立つ.) 同様に, 同じ ϵ に対して,

$$\text{ある自然数 } N_2 \text{において}, n \geq N_2 \text{ならば } |b_n - b| < \epsilon/2.$$

この時, N を N_1, N_2 の大きい方とすると, $n \geq N$ ならば

$$|\{a_n + b_n\} - \{a + b\}| < |a_n - a| + |b_n - b| < \epsilon.$$

全体をまとめると, どんな小さな正実数 ϵ に対しても, ある自然数 N によって上の式が成り立つのだから, $\{a_n + b_n\}$ は $a + b$ に収束する. □

数列 $\{a_n\}$ が単調増加（単調減少）であるとは, 全ての自然数 n に対して $a_n \leq a_{n+1}$（$a_n \geq a_{n+1}$）であることをいう. また, 数列 $\{a_n\}$ をその値からなる集合と考えて「上に有界」,「下に有界」という言葉を転用する. すなわち, ある実数 c に対して全ての n で $a_n \leq c$ ($a_n \geq c$) であるとき, $\{a_n\}$ は上 (下) に有界であるという.

さて, 次の「公理」は一見当たり前の事のように思える.

公理 3.1.

1. *上に有界な単調増加数列は必ず収束する.*

2. *下に有界な単調減少数列は必ず収束する.*

例 3.1. $a_1 = 2$, $a_n = \dfrac{a_{n_1}^2 + 2}{2a_{n-1}}$ $(n \geq 2)$ なる数列を考える. このとき,

$$a_n - \sqrt{2} = \frac{a_{n-1} - 2\sqrt{2}a_{n-1} + 2}{2a_{n-1}} = \frac{(a_{n-1} - \sqrt{2})^2}{2a_{n-1}}.$$

ここで $a_1 > \sqrt{2}$ から出発するから, $a_n > \sqrt{2}$, つまり下に有界である. 一方,

$$a_n = a_{n-1} - \frac{a_{n-1}^2 - 2}{2a_{n-1}} < a_{n_1}$$

であるから単調減少数列である. したがって公理 3.1 より $\{a_n\}$ は収束する. その極限を a とすると, $\lim_{n\to\infty} a_{n-1} = a$ でもあるから,

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}^2 + 2}{2a_{n-1}} = \frac{a^2 + 2}{2a}.$$

つまり $a^2 = 2$ であり, $a_n > \sqrt{2}$ であったから $a = \sqrt{2}$ である.

この例の $\{a_n\}$ は作り方からして有理数だけからなる．つまり有理数列である．ところが極限は有理数ではない．つまり「下に有界で単調減少な有理数列は有理数に収束しない」．つまり公理 3.1 は有理数だけの世界では成り立たない．

さらに次の例を考えてみよう．

例 3.2.

$$b_n = (\text{円周率を小数点}\, n\, \text{桁目で切り上げた数})$$

これも下に有界で単調減少な有理数列であるが, 極限は超越数 π であり, 有理数どころか代数的数でもない．つまり公理 3.1 は代数的数だけの世界でも成り立たない．

実は公理 3.1 は, 実数の範囲まで拡張してようやく成り立つ, 実数特有の性質である．だから証明がない．「実数とはなにものか?」の答えだからである．ちなみに前節の公理 2.1 は公理 3.1 と実質的に同じ事である．

定理 3.2. *公理 2.1 が成り立つなら公理 3.1 も成り立つ．*

逆に公理 3.1 が成り立つなら公理 2.1 も成り立つ．

つまりこのふたつの公理は必要十分条件（同値）である．

証明．(この証明は長いので読まないか, 第１段落だけを読んでもよい.)

公理 2.1 1. が成り立つとする．数列 a_n が上に有界な単調増加数列ならば, $\{a_n\}$ の値からなる集合が上に有界だから上限 a が存在する．加えて $\{a_n\}$ が単調増加数列だから $a - a_n$ は正で減少し続ける．もし $a - a_n$ がある正の実数 ϵ より小さくならないとすれば, $a - \epsilon$ が $\{a_n\}$ の上界になり, a が上限（最小上界）である事と矛盾する．したがって $\{a - a_n\}$ は 0 に収束する, つまり $\{a_n\}$ は a に収束する．同様に, 公理 2.1 2. から公理 3.1 2. を証明出来る．

逆に公理 3.1 が成り立つとする．上に有界な集合 A に対して, A の上界の集合を B, さらに A の上界でない実数の集合を C とする．A が上に有界だから B は空集合ではないし, $a \in A$ に対して $a - 1$ は A 上界でないから C も空集合ではない．また, $c \in C$ は A の上界でないから, ある $a \in A$ と任意の $b \in B$ に対して $c < a \leq b$ である．さらに, どの実数も A の上界であるかないかの一方だから, どの実数も B か C の一方に必ず属している．

そこで任意の $b_1 \in B, c_1 \in C$ を取り, $d_1 = \dfrac{b_1 + c_1}{2}$ とする．もし $d_1 \in B$ ならば $b_2 = d_1$, $c_2 = c_1$ とする．そうでなければ (つまり $d_1 \in C$ の場合), $b_2 = b_1$, $c_2 = d_1$ とする．以下同様に, 任意の自然数 n に対して $d_n = \dfrac{b_n + c_2}{2}$ として

1. $d_n \in B$ ならば $b_{n+1} = d_n$, $c_{n+1} = c_n$ とする.
2. そうでなければ (つまり $d_n \in C$ の場合), $b_{n+1} = b_n$, $c_{n+1} = d_n$ とする.

このようにふたつの数列 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を定める. 定め方からして, $\{b_n\}$ は B の要素だけからなり, 下に有界で単調減少数列である. 同様に, $\{c_n\}$ は C の要素だけからなり, 上に有界で単調増加数列である. したがって, 公理 3.1 より, どちらも収束する. $\{b_n\}$ の極限を b, $\{c_n\}$ の極限を c とする. $b_n > c_n$ であったから $b \geq c$ である. 仮に $b \neq c$ と仮定すると, $(b-c)/8$ より小さい実数 ϵ に対して, ある自然数 N により

$$n \geq N \quad \text{ならば} \quad b - \epsilon < b_n < b + \epsilon, \quad c - \epsilon < c_n < c + \epsilon \tag{3.1}$$

となる. このとき,

$$c + \epsilon < \frac{b + c - 2\epsilon}{2} < d_n = \frac{b_n + c_n}{2} < \frac{b + c + 2\epsilon}{2} < b - \epsilon$$

よって, $b_{n+1} < b - \epsilon$ か $c_{n+1} > c + \epsilon$ が成り立ち, (3.1) と矛盾する. したがって $b = c$ である.

この $b = c$ が A の上限である事を示す. $\{b_n\}$ は B の要素からなる数列であるから, 任意の $a \in A$ に対して $a \leq b_n$, したがって $a \leq b$ である. つまり b は上界である. 次に $b' < b$ なる任意の実数 b' を取り, これが上界でない事を示せばよい. $\{c_n\}$ も b に収束するので, n が十分大きくなれば $b' < c_n \leq b$ である. しかし $c_n \in C$ である, つまり A の上界でないから, ある $a \in A$ によって $b' < c_n < a \leq b$, したがって b' は上界ではない. これで b が最小上界, すなわち上限である事を示した. □

まとめると, 「実数とはなにものか?」の答えは次のようになる. どの言い方も実質的に同じである.

- 加減乗除と順序があって, 公理 2.1 が成り立つ数の集合.
- 加減乗除と順序があって, 公理 3.1 が成り立つ数の集合.
- 有理数に数列の極限 ($\pm\infty$ を除く) をうまく付け加えて, 極限操作がうまく閉じるようにしたもの.
- 例 3.2 からも分かるわかるように, 全ての有限小数と無限小数の集合.
- 隙間のない数直線で表現される数の集まり.

このように実数は「数列の極限」, あるいは「隙間なく連続に数がある事」に基づいた概念である. 円周率のように紀元前何十世紀から「実数」が扱われてきたのだが, このような「実数の正体」がはっきりと分かったのは１９世紀終わり近くになってからである. 人類は, 正体も分からないまま何千年も「実数」を扱い続けたともいえる.

4　n 次元ベクトル点列, 複素数列の極限

もう一度, 数列の収束の定義を思い出してみよう.

「数列 $\{a_n\}$ が a に収束するとは, どんな小さな正の実数 ϵ に対しても,

$$n \geq N \quad \text{ならば} \quad |a_n - a| < \epsilon$$

となるような自然数 N が存在する事をいう.」

ここで $|a_n - a|$ は a と a_n の距離であったつまり, 距離の概念があれば, 実数でなくても「収束・極限」を考えることが出来るのではないか.

距離の概念がある集合として, 次のようなものがある.

例 4.1.

1. 複素数 $\mathbb{C}$ のふたつの要素 $a = a_1 + a_2 i$, $b = b_1 + b_2 i$ の距離は
$$|a - b| = \sqrt{(a-b)\overline{(a-b)}} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2}.$$
2. n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ のふたつの要素 $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ の距離は
$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)^2}.$$

この距離を使って, 実数と全く同じ文章で収束を定義出来る.

ただし発散に関しては, 実数の時は $+\infty$ と $-\infty$ の２方向しかなかったが, $\mathbb{C}$ や $\mathbb{R}^n$ では方向がたくさんあるので, 単に収束しない事を発散というか,

$$\text{どんな大きな}\epsilon\text{に対しても, ある自然数 } N \text{ により}, n \geq N \text{ ならば } |a_n| > \epsilon,$$

すなわち原点からの距離が ∞ になることを発散といったりする.

上に述べたように, 距離を使って $\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^n$ の収束を定義したが, その一方でこれらは実数を使った成分表示が可能である. 複素数列や点列の極限と, 各成分の実数列としての極限はどんな関係があるのだろうか.

定理 4.1. $a_n = (a_n^1, a_n^2, \cdots, a_n^k) \in \mathbb{R}^k$または $\mathbb{C}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} a_n = (a^1, a^2, \cdots, a^n)$ の必要十分条件はすべての i $(1 \le i \le k)$ に対して $\lim_{n\to\infty} a_n^i = a^i$ である. 言い方を変えると

$$\lim_{n\to\infty} a_n = (\lim_{n\to\infty} a_n^1, \lim_{n\to\infty} a_n^2, \cdots, \lim_{n\to\infty} a_n^k),$$

つまり各成分ごとに極限を取ったものと同じである.

証明. まず必要性を示す. どんな小さな正実数 ϵ に対しても, ある自然数 N により, $n \ge N$ ならば $|a_n - a| < \epsilon$ である. つまり, どの i に対しても,

$$\epsilon^2 > \sum_{j=1}^{k} (a_n^j - a^j)^2 \ge (a_n^i - a^i)^2,$$

したがって $|a_n^i - a^i| < \epsilon$.

次は十分性を示す. どんな i, どんな正実数 ϵ に対しても, ある自然数 N_i により, $n \ge N_i$ ならば $|a_n^i - a^i| < \epsilon/k$ である. ここで $N = \max\{N_1, N_2, \cdots, N_k\}$ とすると,

$$n \ge N \text{ ならば} \sum_{i=1}^{k} (a_n^i - a^i)^2 < k(\frac{\epsilon}{k})^2 = \frac{\epsilon^2}{k} < \epsilon^2,$$

したがって $|a_n^i - a^i| < \epsilon$. □

この定理と, 実数列の極限の加減乗除に関する定理 3.1 から, 複素数列や n 次元点列 $a_n \to a$, $b_n \to b$ $(n \to \infty)$ と実数列 $\alpha_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$ に対して

$$a_n + b_n \to a + b, \quad \alpha_n \cdot a_n \to \alpha \cdot a \quad (n \to \infty),$$

さらに $\mathbb{C}$ の場合は,

$$a_n b_n \to ab, \quad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b} \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ.

5 数に関する無駄話

5.1 数の区切り方など

アラビア数字表記において, 英米では整数を 3 桁ごとにコンマ (,) で区切り, 小数点をピリオド (.) で区切る (例:1,234,567.89). ところが大陸ヨーロッパ諸国では反対に, 整数 3 桁区切りをピリオド, 小数点をコンマ

で区切る (例:1.234.567,89). 3桁区切りを空白で取る場合もある (例:1 234 567,89).

せっかくのネット版なので, 例えば yahoo! ファイナンスのホームページの下の方にある各国版のリンクを叩いて, 各種インデックスを見てみると良いだろう. EU の統計データダウンロードサイトでは, 小数点をピリオドとコンマのどちらで出力するか選択出来るようになっている.

日本でのアラビア数字表記は英米式を取り入れた訳だが, 江戸時代以前の表記はどうなっていたか. その名残が体温表記とスポーツの勝率等の表記にある.

体温表記は「37 度 4 分」と表記する. これは 37.4 度のことである. もっと小さな桁まで言うならば「三十七度四分五厘二毛」といった具合である. つまり一から九までに桁数語をつけ, 大きい順に並べている. 分厘毛などは 1 未満の桁数語なのである. ただし 1 の位には単位 (体温ならば度) が入る.

スポーツの勝率も同じく「5 割 7 分 3 厘 3 毛」と表記する. ここで注意すべきは, 「割」が桁数語ではなく単位である点である. 「 % 」が「100 を全体と考えた時の割合」を表す単位であるのと同様, 「割」は「十を全体と考えた時の割合」を表す単位である. 割を使って現代風に書けば「5.733 割」となる. 一方 % を使って日本風に表現すれば「五十七パーセント三分三厘」である.

5.2 虚数単位

$x^2 + 1 = 0$ の解である虚数単位は, 通常 ”Imaginary part” の頭文字をとって i と書く.

ところが虚数単位を i で表記しない分野が存在する. 電気関連の分野である. 電気関連では, i, I は伝統的に電流を表すので, そちらを優先し, 虚数単位は j で表現される.

もちろん電気分野で虚数単位を使わなければ, こんな事を気にする必要はない. 使うから問題になるのである. 初等関数の節で述べるが, 波動を扱う分野では, 指数関数の複素数拡張 e^{it} が良く使われる. 電気関連でも交流電源や音声信号を始めとして波動をよく扱うので, 虚数単位は必要不可欠なのである. そこで文字を変えてでも使わざるをえないのである.

5.3 $(-1) \times (-1) = +1$

解析学の内容ではないが, 数の体系について述べたのでこの件について簡単に触れておく.

自然数全体 $\mathbb{N}$ に 0 と負の数を付け加えたのが整数 $\mathbb{Z}$ である．この付け加えた数の性質は,

$$0+a=a+0=a \quad (-a)+a=a+(-a)=0$$

である．これから $0+1=1$, $(-1)+1=0$, $(-2)+1=(-2)+1+0=(-2)+1+1+(-1)=(-2)+2+(-1)=(-1)$ などとなる．自然数において $+1$ する事で「次の数」を得られるのだが, これを 0 と負の数にあてはめれば, 1 の前は 0, 0 の前は -1, -1 の前は -2 などとなる．

また, 次の結果が得られる．

1. $-(-a)$ とは $(-a)+x=0$ となる x であるから, $-(-a)=a$ である．
2. $0\times a=0\times a+0=0\times a+a+(-a)=0\times a+1\times a+(-a)=(0+1)\times a+(-a)=1\times a+(-a)=a+(-a)=0$.
3. $(-1)\times a=(-1)\times a+0=(-1)\times a+a+(-a)=(-1)\times a+1\times a+(-a)=(-1+1)\times a+(-a)=0\times a+(-a)=-a$.
4. 上より直ちに $(-1)\times(-a)=-(-a)=a$, 特に $(-1)\times(-1)=1$.

ここで注意をすると, $-a$ と $(-1)\times a$ は, 結果として同じ値だが, 意味が違う．前者は「a と足し算して 0 になるような数」であるのに対して, 後者は掛け算という演算を行なっている．実際, 上のように $-(-a)=a$ は意味から明らかであるのに対して, $0\times a=0$ や $(-1)\times a=-a$, $(-1)\times(-1)=+1$ を証明するには分配則が必要になる点からも, この事が分かる．分配則は「掛け算本来の意味」を持っていたから, それを守ろうとしたら $(-1)\times(-1)=+1$ になったといえる．

分配則という仰々しい理屈を持ち出さず, 視覚的に「掛け算の負への拡張」を考えるには, 九九表を負に拡張してみればよい．あまり大きな表でも困るので, 3 から -3 まで の「九九表」にする．

$\times$	3	2	1	0	-1	-2	-3
3	9	6	3	0			
2	6	4	2	0			
1	3	2	1	0			
0	0	0	0	0			
-1							
-2							
-3							

一番上の行は 9, 6, 3, 0 と 3 の倍数で減っている．そこで -3, -6, -9 と減らすのが妥当であろう．同様に 2 行目, 3 行目, 4 行目も埋めると次のようになる．

×	3	2	1	0	-1	-2	-3
3	9	6	3	0	-3	-6	-9
2	6	4	2	0	-2	-4	-6
1	3	2	1	0	-1	-2	-3
0	0	0	0	0	0	0	0
-1							
-2							
-3							

同じ事を縦の列についても考えよう．(負)×(正) は (正)×(負) の結果と掛け算の可換性を利用してもよい．

×	3	2	1	0	-1	-2	-3
3	9	6	3	0	-3	-6	-9
2	6	4	2	0	-2	-4	-6
1	3	2	1	0	-1	-2	-3
0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-3	-2	-1	0			
-2	-6	-4	-2	0			
-3	-9	-6	-3	0			

それでは残された右下の部分はどう埋めるべきであろうか?

ここで 0 の存在が意外と重要である事が分かる．0 の「発見」はそれほど古い話ではないが, かなり重要な「発見」である事が分かる．