数学演習 A 演習問題 (1)

論理.

0. A, B, C の 3 人が大阪生まれか否かを考える. 各人「大阪生まれである」「大阪生まれでない」の 2 通りの可能性しかない.

(1) 3 人全体で考えると何通りの可能性が考えられるか. それをすべて列挙し, 以下の問いに答えよ.

(1-1) 「全員が大阪生まれである」と言った時, どの可能性がありうるか.

(1-2) 「大阪生まれの人がいる」と言った時, どの可能性がありうるか.

(1-3) 「全員が大阪生まれである」を否定すると, どの可能性がありうるか. これを適当な日本語で表現せよ.

(1-4) 「大阪生まれの人がいる」を否定すると, どの可能性がありうるか. これを適当な日本語で表現せよ.

(2) 以下, A と B の二人だけで考える. (1) 同様にすべての可能性を列挙し, 以下の問いに答えよ.

(2-1) 「A と B はともに大阪生まれである」を否定すると, どの可能性がありうるか. これを「A と B は」で始まる適当な日本語で表現せよ.

(2-2) 「A と B はどちらか一方だけが大阪生まれでない」と言った時, どの可能性がありうるか. (2-1) との違いは何か.

(2-3) 実は A は B の兄で, 一家は以前東京にいたが大阪に引っ越してきて, 以来大阪にいる. ただし引っ越してきた時期は A, B が生まれる前か後か不明である. したがって「A が大阪生まれならば B も大阪生まれである」ことだけが分かる. この時どの可能性がありうるか.

(2-4) 実は A と B は双子であった. この時どの可能性がありうるか. これを表す適当な日本語があれば, それを書け.

関数.

1. 2 変数関数、3 変数関数の例を挙げよ (出来るだけ面白い例を挙げること).

2 変数関数の例:$(\theta,\varphi)\mapsto$(経度 θ, 緯度 φ における気温)

3 変数関数の例:$(n,T,V)\mapsto$(酸素 n mol の絶対温度 T, 体積 V における圧力)

2.

(1) 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ において,

$$\text{どんな } y\in\mathbb{R} \text{ に対しても}, y=f(x) \text{ となる } x\in\mathbb{R} \text{ が存在する}$$

が成り立つときに, f は全射であるという. また

$$\text{どんな } x_1,x_2\in\mathbb{R} \text{ に対しても}, x_1\neq x_2 \text{ならば } f(x_1)\neq f(x_2)$$

が成り立つときに, f は単射であるという.

全射かつ単射な関数, 全射だが単射でない関数, 単射だが全射でない関数, 全射でも単射でもない関数, それぞれの例を挙げよ.

(2) 単射関数の定義を参考にして, 単調増加関数, 単調減少関数の定義を書け.

(3) 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が単射かつ全射ならば逆関数

$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x=f^{-1}(y)\in\mathbb{R} \text{ は } y=f(x) \text{ をみたす}$$

が定義出来る.

(3-1) f は全射でないが逆関数を作りたい. どうすればよいか?

(3-2) f は単射でないが逆関数を作りたい. どうすればよいか?

3. 関数 $f:A\to B$, $g:B\to C$ に対して

(1) 合成関数 $g\circ f:A\to C$, $g\circ f(x)=g(f(x))$ が単射ならば f は単射であることを示せ.

(2) $g\circ f$ は単射だが g が単射でない f, g の例を, $A=B=C=\mathbb{R}$ の場合で作れ.

(3) $g\circ f$ が全射ならば g は全射であることを示せ.

(4) $g\circ f$ は全射だが f が全射でない f,g の例を, A,B が $\mathbb{R}-\{0\}$ または $\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$, $C=\mathbb{R}$ の場合で作れ.

4. X 高校 3 年 1 組の男子の集合を A, 女子の集合を B とする. また, $f:A\to B$ を「x くんは集合 B の中で $f(x)$ さんが一番好き」, $g:B\to A$ を「x さんは集合 A の中で $g(x)$ くんが一番好き」という写像とする.

(1) x くん ($\in A$) は「片思いである」「両思いである」「ライバルがいる」を, それぞれ f, g を使って説明せよ.

(2) 「x くんは横恋慕している」とは「$g(f(x))\neq x$ かつ $f(g(f(x)))=f(x)$」なる状態を指す. これを普通の日本語で説明せよ.

(3) f が「単射である」「単射でない」「全射である」「全射でない」とは, この場合それぞれ要するにどういうことか?

(4) 「A,B の全員が両思いである」ための条件を f, g を使って書け. (A,B の人数が等しいかどうかは事前に分からないとする.)

(5) 有限集合 A,B に対して「 A と B の要素の個数が等しい」とは, 単射かつ全射な写像 $f:A\to B$ (または $g:B\to A$) が存在することである. (4) の条件を満たすとき, A と B の要素の個数が等しい事を示せ. (ヒント:前問の (1)(3) を使う.)
(注 1: 有限集合 A の要素の個数が n 個であるとは, 自然数の部分集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ と A との間に単射かつ全射な写像が存在することである.)
(注 2: 見方を変えれば, 要素の個数が違う集合の間には全射かつ単射な写像を作れない.)

5. 有限集合での「個数が等しい」の概念を拡張して, 無限集合 A,B に対して単射かつ全射な写像 $f:A\to B$ (または $g:B\to A$) が存在するとき, A と B は 1 対 1 対応している, または同じ濃度であるという.

なお, 2 つの方向の単射 $f:A\to B$, $g:B\to A$ が存在すれば A と B は同じ濃度であることが知られている (カントル・シュレーダー・ベルンシュタインの定理. この定理の証明はかなり難しい).

(1) 実数全体 $\mathbb{R}$ と区間 $(0,1)$ は同じ濃度である事を示せ. 同様に, 有理数全体 $\mathbb{Q}$ と $(0,1)\cap\mathbb{Q}=\{(0,1)$ 内の有理数全体 $\}$ は同じ濃度である事を示せ. (関数 $f(x)=\frac{2x-1}{1-|2x-1|}$ がどちらの場合も単射かつ全射であることを示せ.)

(2) 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$, 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$, 偶数全体の集合 $2\mathbb{Z}$, 座標平面の整数座標点全体の集合 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ の間に単射かつ全射な写像を実際に作り、これらが同じ濃度であることを示せ.

(3) 座標平面の整数座標点全体の集合 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ と有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は同じ濃度であることを示せ. したがって (2) より $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Q}$ は同じ濃度である. ($f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ として, 既約分数 p/q $(q>0)$ に対して $f(p/q)=(p,q)$ なる関数を, $g:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ として $g(p,q)=p+1/(6q-3)$ なる関数をとり, どちらも単射であることを示し, これにカントル・シュレーダー・ベルンシュタインの定理を適用する. 全射かつ単射な関数をひとつ作ってもよい.)

(4) $\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$ は同じ濃度ではないことを示せ (対角線論法). $\mathbb{N}$ より $\mathbb{R}$ の方がはるかに大きい. よって (2), (3) に挙げたどの集合よりも $\mathbb{R}$ の方がはるかに大きい.