数学演習 A 演習問題 (2)

数列の極限.

6. 以下の命題を証明せよ.
(1) 収束する数列は上にも下にも有界である.
(2) 数列 $\{a_n\}$ が 0 でない極限 a をもつとき, 初めの有限項を除いて a_n は a と同じ符号を持つ.
(3) 数列 $\{a_n\}$ と狭義単調増加自然数列 $\{n_k\}$ に対して, 新たな数列 $\{a_{n_k}\}$ を $\{a_n\}$ の部分列という.（$\{n_k\}$ が, $\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$ ではなく, もっと飛び飛びに増えていく場合は「部分列」という言葉のイメージに合致する.）数列 $\{a_n\}$ が収束, または $\pm\infty$ に発散するならば, 部分列 $\{a_{n_k}\}$ は $\{a_n\}$ と同じ極限を持つ.
(4) (3) の逆は成り立たない事を示せ. すなわち, 数列 $\{a_n\}$ が収束も $\pm\infty$ に発散もせず (つまり振動する), 部分列 $\{a_{n_k}\}$ が収束する例, $+\infty$ に発散する例を作れ.

7. 次の数列の極限を求めよ. (c, d は実数)
(1) $\{c^n\}$ (2) $\{\sqrt[n]{c}\ \ (c>0)\}$ (3) $\{(n^2+1)/(n^2+2n)\}$
(4) $\{c^n/n!\}$ (5) $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$ (6) $\{(1-\frac{1}{n})^n\}$
(7) $a_1 = 1, a_{n+1} = (a_n^2 - 3)/2a_n$ で定義される $\{a_n\}$
(8) $a_1 = a > 0, a_{n+1} = (a_n^2 + 1)/2$ で定義される $\{a_n\}$
(9) $a_1 = c\ (\geq -3/2)$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ で定義される $\{a_n\}$
(10) $a_1 = c$, $a_2 = d$, $a_{n+2} = (a_{n+1} + a_n)/2$ で定義される数列 $\{a_n\}$.
(11) $a_1 = c$, $a_2 = d$, $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$.
(12) c に収束する数列 $\{a_n\}$ に対して $b_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$.

複素数列, 点列の極限.

8. 複素数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が $a_n \to a$, $b_n \to b$ $(n \to \infty)$ となる時に $a_n + b_n \to a + b$ となることを. 以下の 2 通りの方法で示せ.
(1) 実部と虚部に分解して, それぞれの収束を示す.
(2) 複素数列の収束の定義をそのまま使い, 実数列での同様の定理の証明と同じ手法で示す (証明の文章自体は実数の場合と全く同じでよい. なぜ同じでよいのか? 実数の場合と何が違うのか?).

9. 次の極限を求めよ
(1) $\{c^n\}\quad (c \in \mathbb{C})$
(2) 2 次元空間 $\mathbb{R}^2$ の点列 $\{(1 + 2\sum_{k=0}^{n-1} c^k + c^n, c^{2n})\}\quad (0 < c < 1)$
(3) 三角形 $\triangle a_1b_1c_1$ の, 辺 a_1b_1 中点を a_2, 辺 b_1c_1 中点を b_2, 辺 c_1a_1 中点を c_2 とし, 以下同様に 三角形 $\triangle a_nb_nc_n$ から点 a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} を決める. このとき, 平面上の点列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ はいずれも三角形 $\triangle a_1b_1c_1$ の重心に収束する事を示せ.

10. ベクトル空間や複素数同様,「距離」の概念があれば極限を考えることが出来る. 集合 X において, X 上の 2 変数関数 $d(x, y)$ が次の条件を満たす時, d を X 上の距離関数という.
i. どんな $x, y \in X$ 対しても $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = d(y, x)$,
ii. $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
iii. どんな x, y, $z \in X$ に対しても $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.
$A \subset \mathbb{R}$ とする. A 上の実数値関数全体 F において, $|f(x) - g(x)|$ の上限を $d(f, g)$ として $f, g \in F$ の距離を定める. この距離を使って, 関数列 $\{f_n\}$ の収束を定義出来る.
(1) 実際に $d(f, g)$ は距離の条件を満たすことを示せ.
(2) この距離を使って, 関数列の収束を定義せよ (関数列の一様収束).
(3) 関数列 $\{f_n\}$ が $f \in F$ に収束するならば, 任意の $x \in A$ に対して実数列 $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に収束することを示せ (関数列の各点収束). したがって関数列が収束するならば, その極限は $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ である.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

(4) 任意の $x \in A$ に対して数列 $\{f_n(x)\}$ が収束しても, 関数列 $\{f_n\}$ が収束するとは限らない. 実際 $A = (0,1)$, $f_n(x) = x^n$ が収束しない例である. (つまり一様収束は各点収束よりも「厳しい」条件である. 代わりに, 連続関数列が一様収束すれば極限も連続関数になる.)

関数の極限, 連続.

11. 以下の関数について, $x \to +0$, $x \to -0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ の極限を求めよ. また, $f(0)$ が定まるならば求めよ. これらの関数は $x = 0$ で連続か? 連続でなければ, $x = 0$ での値を定める (置き換える) ことで連続に出来るか?

(1) $e^{1/x}$ (2) e^{-1/x^2} (3) $\displaystyle f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^i}$

12. 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ (2) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ (4) $\displaystyle \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$

13. 以下を示せ.

(1) $f : A \to \mathbb{R}$ が $x = \alpha$ で連続で $f(\alpha) > 0$ ならば, ある δ が存在して $|x - \alpha| < \delta$ で $f(x) > 0$ である.
(2) 有理関数 $f(x)$ の分母の多項式が $x = a$ で 0 になるとする. $\lim_{x\to a} f(x)$ が 0 でない有限の極限を持つとき, 分子と分母の次数はどのような関係にあるか. また, 極限値は何で決まるか.
(3) 実数係数の奇数次代数方程式は実数根を少なくともひとつ持つ.
(4) $a > 0$, 自然数 n に対して, 方程式 $x^n - a = 0$ は $x > 0$ の範囲にただひとつ解が存在する. この解を $\sqrt[n]{a}$ と書く.
(5) 負でない実数上の関数 $\sqrt[n]{x}$ は連続である.

14.

(1) 有界閉区間 $I = [a,b]$ に対して, 関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が I で連続で, $f(a) < \gamma < f(b)$ (または $f(a) > \gamma > f(b)$) ならば, $f(c) = \gamma$ を満たす $c \in (a,b)$ が存在する (中間値の定理).
  (1-1) I が区間ではない (途中が抜けている集合) ならば, 中間値の定理は言えない. 中間値が全て存在する例と存在しない例を挙げよ.
  (1-2) $f(x)$ が有界閉区間 I で連続でなければ, 中間値の定理は言えない. 中間値が全て存在する例と存在しない例を挙げよ.
  (1-3) 区間 I が開区間や半開区間の場合は, 中間値の定理をどのように拡張出来るか. その命題を書いて, それを証明せよ. (ヒント: 開区間等には「端」がない. 代わりをどうするか?)
(2) 有界閉区間 $I = [a,b]$ に対して, 関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が I で連続ならば $f(x)$ は I において最大値, 最小値を持つ.
  (2-1) 考える区間 I が開区間や半開区間ならば最大値, 最小値を持つとは限らない. 最大値, 最小値を持つ例と持たない例を挙げよ.
  (2-2) 考える区間 I が有界区間でなければ, 最大値, 最小値を持つとは限らない. 最大値, 最小値を持つ例と持たない例を挙げよ.
  (2-3) $f(x)$ が有界閉区間 I で連続でなければ, I で最大値, 最小値を持つとは限らない. 最大値, 最小値を持つ例と持たない例を挙げよ.
(3) 実数の区間 I に対して関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が狭義単調増加または狭義単調減少ならば単射である. さらに f が I で連続ならば逆が言える, すなわち $f(x)$ が単射であれば $f(x)$ は狭義単調増加または狭義単調減少である.
  (3-1) 上の文の前半を証明せよ.
  (3-2) I が区間ではない (途中が抜けている集合) ならば, 狭義単調でない単射がありうる. 実例を挙げよ.
  (3-3) $f(x)$ が区間 I で連続でなければ, 狭義単調でない単射がありうる. 実例を挙げよ.
(4) 実数の区間 I に対して関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が I で単射かつ連続ならば, 逆関数 f^{-1} も連続である. しかし I が区間ではない (途中が抜けている集合) ならば, f が単射で連続でも f^{-1} が連続でないことがある. 連続な例と連続でない例を挙げよ.