数学演習 A-I 演習問題 (5)

導関数の性質とその応用.

注： 近似計算で「有効精度 k 桁まで」とある場合は, 実際にその精度を有する根拠を示すこと. そろばん電卓使用可 (加減乗除に限る). 桁数打ち切りによる誤差に注意.

29. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が $[a,b]$ で連続で, (a,b) で微分可能であるとする. このとき, 次を示せ.

(1) $f(x)$ が $[a,b]$ で広義単調増加である必要十分条件は, $x\in(a,b)$ で $f'(x)\geq 0$ である.

(2) $x\in(a,b)$ で $f'(x)>0$ ならば, $f(x)$ は $[a,b]$ で狭義単調増加である.

(3) $f(x)$ は $[a,b]$ で狭義単調増加であっても、全ての $x\in(a,b)$ で $f'(x)>0$ であるとは限らない。その例を挙げよ.

30.

(1) 任意の実数 x で $f^{(n)}(x)=0$ なる関数 $f(x)$ は, $(n-1)$ 次以下の多項式関数に限ることを示せ.(ヒント: Tayler の定理を使う)

(2) $f(x)$ を n 次多項式とし, $x=a$ で $f(a)\geq 0$, $f'(a)\geq 0$, $\cdots$, $f^{(n)}(a)\geq 0$ を満足するとき, 方程式 $f(x)=0$ は a より大きな解を持たないことを示せ.

(3) $f(x)=\begin{cases} 0 & x\leq 0 \text{ のとき,} \\ e^{-1/x} & x>0 \text{ のとき} \end{cases}$ の n 次導関数 $(n=0,1,2)$ の極値点を求め, そのグラフの概形を描け.

(4) 2 点 A, B と直線 l とが与えられたとき, l 上に 1 点 P をとり, $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ を最小にせよ.

(5) $Q(t)=a\cos^2 t+2b\cos t\sin t+c\sin^2 t$ とする. Q が定数になる条件を求めよ. また, Q が定数でないときに Q が最大または最小になる t を求めよ.

31. $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$ は n 次の多項式である (Hermite 多項式). 方程式 $H_n(x)=0$ は相異なる n 個の実数解を持ち, $n\geq 2$ の時にそれらの解は $H_{n-1}(x)=0$ の解によってひとつずつ隔てられている事を示せ.

32. 平面上の定直線 l の両側に点 A_1, A_2 がある. この平面上を動く点の速さが, A_1 側では c_1, A_2 側では c_2 とする. (l 上では $\max\{c_1,c_2\}$ を越えないとする.) 点が A_1 を出発して A_2 に至る時, 所要時間が最小になる経路は折れ線 A_1CA_2 (C は l 上の点) であり, l の垂線と A_1C, A_2C がなす角をそれぞれ α_1, α_2 とすると $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ が成り立つ. (Fermat の原理)

33.

(1) $k>0$ のとき, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{e^x}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_e x}{x^k}=0$ を示せ. また, これを用いて e^x, $\log_e x$ が超越関数である (代数関数ではない) ことを示せ.

(2) e^x の近似式を $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ としたときの誤差を評価せよ. また, これを用いて e が無理数であることを示せ.

34. 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}(\tan x-\sec x)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\log_e(1+x)}{x^2}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}$

35. 次の不等式を示せ.

(1) $(0, \frac{\pi}{2}]$ で $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ (2) $(0, +\infty)$ で $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$

36.

(1) $\sin x$ の Maclaurin 展開を n 次の項で打ち切ったとき, 実際の $\sin x$ との誤差がどの範囲内に収まるか評価し, $[-\pi/2, \pi/2]$ の範囲で小数点以下 3 桁の精度を有する近似多項式を求めよ.

(2) e^x の Maclaurin 展開を n 次の項で打ち切ったとき, 誤差をがどの範囲内に収まるか評価し, e を有効精度 6 桁 (小数点以下 5 桁) まで求めよ.

(3) $\cos 31°$ を有効精度 3 桁まで求めよ.

(4) $\sqrt[3]{30}$ を有効精度 3 桁まで求めよ. (直接的に 3 乗根を開く方法を使ってもよいが, その場合はその方法が正しい事を説明せよ.)

37. ($\arctan x$ の Maclaurin 展開と円周率の計算) $f(x) = \arctan x$ の値域を $(-\pi/2, \pi/2)$ とする.

(1) 以下のことを示し, $f^{(n)}(0)$ の値を求めよ. $y = f(x) = \arctan x$, すなわち $x = \tan y$ とすると

$$f^{(2m)}(x) = (-1)^m (2m-1)! \sin 2my \cos^{2m} y \quad (m \geq 1),$$

$$f^{(2m+1)}(x) = (-1)^m (2m)! \cos(2m+1)y \cos^{2m+1} y \quad (m \geq 0)$$

であり, よって $|f^{(n)}(x)| \leq (n-1)!$ である. n が奇数の時には等号が成り立つ. 一方 n が偶数の時には等号は成り立たないが, n を大きくすれば $\max_{x \in \mathbb{R}} |f^{(n)}(x)/(n-1)!|$ はいくらでも 1 に近づく.

(2) (1) を使って $\arctan x$ の Maclaurin 展開を求め, n 次の項で計算を打ち切ったときの誤差を評価せよ. また, この無限級数が収束するのは $-1 \leq x \leq 1$ であり, 収束するときは $\arctan x$ に収束する事を示せ.

(3) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ を用いて円周率に収束する級数をふたつ求めよ (前者は Gregory - Leibniz の式).

(4) (3) のいずれかを用いて円周率を有効精度 5 桁 (小数点以下 4 桁) まで求めよ. また, 小数点以下 100 桁まで求めるためには, それぞれ何次程度まで計算する必要があるか.

(5) $\alpha = \arctan \frac{1}{5}$, $\beta = \arctan \frac{1}{239}$ とする. このとき, $\tan(4\alpha - \beta) = 1$ であることを示し, これを用いて円周率に収束する級数を求めよ (Machin の公式). この公式で小数点以下 100 桁まで求めるためには何次程度まで計算する必要があるか.

(6) (3),(5) で挙げた式のいずれかを用いて円周率を小数点以下 100 桁まで求めよ.(コンピュータ使用可.)